

Dreapta in plan

i) Presupunem ca planul este inezestrat cu un reper ortonormat de dreapta (O, \vec{i}, \vec{j}) . Fiecarui punct M al planului ii corespunde vectorul \overrightarrow{OM} numit **vector de pozitie al punctului M** (relativ la O). Daca $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$ cu $x, y \in \mathbb{R}$, numerele x si y se numesc **coordonate** (x - **abscisa**; y - **ordonata**) punctului M in reperul (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Prin $M(x, y)$ se noteaza faptul ca punctul M are coordonatele x si y si notatia $M(x, y)$ este echivalenta cu egalitatea $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

ii) In dependenta de date se cunosc mai multe tipuri de ecuatii ale dreptei in plan:

a) Ecuatia dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ si are vectorul director $\vec{a} = \{a_1, a_2\} \neq \{0, 0\}$:

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2}. \quad (1)$$

(Aici si in continuare x si y sunt coordonatele punctului curent (variabil) al dreptei).

b) Ecuatia dreptei care trece prin punctele distincte $M_1(x_1, y_1)$ si $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2)$$

c) Ecuatia dreptei care trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$ si are vectorul normal $\vec{n} = \{a, b\} \neq \{0, 0\}$:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0. \quad (3)$$

d) Ecuatia dreptei care are panta (coeficientul unghiular) m si trece prin punctul $M_0(x_0, y_0)$:

$$(y - y_0) = m(x - x_0), \quad m = \operatorname{tg} \alpha. \quad (4)$$

e) Ecuatia dreptei care intersecteaza axele sistemului de coordonate in punctele $A(a, 0)$ si $B(0, b)$ ($a \neq 0, b \neq 0$), numita si ecuatia dreptei in "segmente" (sau "taieturi"):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (5)$$

f) Fiecare din ecuatiile precedente poate fi adusa la forma unei ecuatii de gradul intii in doua necunoscute, x si y , numita **ecuatia generala carteziana a dreptei**:

$$ax + by + c = 0, \quad (6)$$

$a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a^2 + b^2 = 0$.

g) Inmultind ecuatia (6) prin factorul $-\frac{\operatorname{sgnc}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, obtinem ecuatia normala a dreptei:

$$-\frac{\operatorname{sgnc}}{\sqrt{a^2 + b^2}}(ax + by + c) = 0. \quad (7)$$

Distanta d de la punctul $M_0(x_0, y_0)$ la dreapta l de ecuatie $ax + by + c = 0$ se calculeaza dupa formula:

$$|M_0M_1| = d(M_0, l) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (8)$$

Probleme rezolvate

1. Sa se scrie ecuatia dreptei daca se cunosc punctul $A(-1, 2)$ al dreptei si:

- vectorul director $\vec{a} = \{2, -1\}$;
- punctul $B(2, 0)$ al dreptei;
- vectorul normal $\vec{n} = \{1, 6\}$;
- panta $m = 5$.

Sa se scrie ecuatia generala si ecuatia normala a dreptei in fiecare din cazurile a), b), c), d).

Solutie

Utilizind nemijlocit formulele (1)-(4) obtinem:

- $\frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-1}$;
- $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-2}$;
- $1 \cdot (x+1) + 6 \cdot (y-2) = 0$;
- $y-2 = 5(x+1)$.

Ecuatiile generale:

- $-x-1 = 2y-4 \Leftrightarrow x+2y-3 = 0$;
- $-2x-2 = 3y-6 \Leftrightarrow 2x+3y-4 = 0$;
- $x+6y-11 = 0$;
- $5x-y+7 = 0$.

Ecuatiile normale:

- $\frac{1}{\sqrt{5}}x + \frac{2}{\sqrt{5}}y - \frac{3}{\sqrt{5}} = 0$;
- $\frac{2}{\sqrt{13}}x + \frac{3}{\sqrt{13}}y - \frac{4}{\sqrt{13}} = 0$;
- $\frac{1}{\sqrt{37}}x + \frac{6}{\sqrt{37}}y - \frac{11}{\sqrt{37}} = 0$;
- $-\frac{5}{\sqrt{26}}x + \frac{1}{\sqrt{26}}y - \frac{7}{\sqrt{26}} = 0$.

2. Se da ecuatia a dreptei $12x + 5y + 13 = 0$. Sa se scrie ecuatia acestei drepte:

- cu panta;
- in "taieturi";
- normala.

Solutie

a) Rezolvam ecuatia dreptei in raport cu y si obtinem consecutiv:

$$5y = -12x - 13 \Leftrightarrow y = -\frac{12}{5}x - \frac{13}{5}$$

b) Trecem termenul liber al ecuatiei in partea dreapta si impartim ambele parti ale ecuatiei la -13 :

$$12x + 5y = -13 \Leftrightarrow -\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{13}{12}} + \frac{y}{-\frac{13}{5}} = 1$$

c) Avem $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$. Ecuatia normala: $-\frac{12}{13}x - \frac{5}{13}y - 1 = 0$.

3. Sa se calculeze aria triunghiului format de dreapta $4x - 3y - 12 = 0$ si axele sistemului

de coordonate.

Solutie

Scriem ecuatia dreptei date in "taieturi": $\frac{x}{3} + \frac{y}{-4} = 1$. Punctele de intersectie ale dreptei cu axele sistemului de coordonate sunt $A(3, 0)$ si $B(0, -4)$. Triunghiul OAB este dreptunghic si are catetele $|OA| = 3$ si $|OB| = 4$. De aici $A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$ (u. a.).

4. Sa se determine punctul de intersectie al dreptelor $x - y - 2 = 0$ si $x + y - 6 = 0$.

Solutie

Cum punctul de intersectie P apartine ambelor drepte, coordonatele lui sunt solutii ale sistemului

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

De aici, $P(4, 2)$.

5. Sa se afle coordonatele punctului C_1 simetric punctului $C(2, 4)$ fata de dreapta $x - y - 2 = 0$.

Solutie

Problema se rezolva in trei etape.

Etapa 1. Scriem ecuatia dreptei ce trece prin punctul C perpendicular pe dreapta data. Ea are forma $x + y + k = 0$. Din conditia ca C apartine acestei drepte obtinem $2 + 4 + k = 0 \Rightarrow k = -6$.

Obtinem $x + y - 6 = 0$.

Etapa 2. Gasim coordonatele punctului P de intersectie a dreptei date cu dreapta gasita, rezolvind sistemul

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 6. \end{cases}$$

Deci, $P(4, 2)$.

Etapa 3. Cum P este mijlocul segmentului CC_1 , utilizind formulele pentru coordonatele mijlocului segmentului, gasim $C_1(6, 0)$.

6. Punctele $A(2, 4)$ si $B(1, 0)$ se afla de aceeasi parte a dreptei $x - y - 2 = 0$. Sa se determine punctul M pe dreapta data astfel incit suma $AM + MB$ sa fie minima.

Solutie

Gasim punctul $A_1(6, 0)$ simetric punctului A fata de dreapta data (vezi **problema 5**). Scriem ecuatia dreptei A_1B : $y = 0$ (deoarece punctele A_1 si B au aceeaasi ordonata egala cu 0). Gasim punctul M de intersectie al dreptei date cu dreapta A_1B : $M(2, 0)$. Acesta este punctul cautat, deoarece $AM + MB = A_1M + MB = A_1B < AN + NB = A_1N + NB$ pentru orice punct $N \neq M$ de pe dreapta $x - y - 2 = 0$.

7. Sa se gasesca un punct P pe dreapta $3x - y - 1 = 0$ modulul diferentei distantelor caruia pina la punctele $A(4, 1)$ si $B(0, 4)$ sa fie maximala.

Solutie

Punctele date se afla de parti diferite ale dreptei date. Gasim simetricul A_1 al punctului A fata de dreapta data conform schemei din **problema 5**. Astfel $A_1(-2, 3)$.

Scriem ecuatiile dreptei A_1B : $\frac{x+2}{2} = \frac{y-3}{1} \Leftrightarrow x+2 = 2y-6 \Leftrightarrow x-2y+8=0$.

In final gasim punctul P de intersectie al dreptei date $3x - y - 1 = 0$ cu dreapta $x - 2y + 8 = 0$.

$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ x - 2y = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

Deci, $P(2, 5)$ este punctul cautat deoarece pentru orice alt punct N de pe dreapta data avem $|BP - AP| = |BP - A_1P| = BA_1 > |BN - NA_1| = |BN - NA|$.

8. Sa se scrie ecuatiile dreptei care trece prin punctul $A(2, 5)$ si este egal departata de punctele $B(-1, 2)$ si $C(5, 4)$.

Solutie

Exista doua drepte cu proprietatile din enuntul problemei. Una din ele este dreapta care trece prin A si este paralela cu dreapta BC . Vectorul $\overrightarrow{BC} = \{6, 2\}$ este un vector director al acestei drepte si conform **formulei (1)** avem ecuatiile

$$\frac{x-2}{6} = \frac{y-5}{2} \Leftrightarrow 2(x-2) = 6(y-5) \Leftrightarrow x-3y+13=0.$$

A doua dreapta trece prin punctul A si mijlocul $D(2, 3)$ al segmentului BC . Ecuatiile ei este $x - 2 = 0$.

9. Sa se scrie ecuatiile dreptei ce trece prin punctul de coordonate $(1, 3)$ si punctul de intersectie a dreptelor $2x + 3y - 5 = 0$ si $5x - 4y - 5 = 0$.

Solutie

Metoda 1. Gasim punctul de intersectie a dreptelor date si apoi scriem ecuatiile dreptei ce trece prin doua puncte.

Avem

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 4y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{35}{23} \\ y = \frac{15}{23} \end{cases}$$

Ecuatia ceruta: $\frac{x-1}{\frac{35}{23}-1} = \frac{y-3}{\frac{15}{23}-3} \Leftrightarrow 9x + 2y - 15 = 0$.

Metoda 2. Orice dreapta care trece prin punctul de intersectie a dreptelor date are ecuatiile $\alpha(2x + 3y - 5) + \beta(5x - 4y - 5) = 0$, unde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Conditia ca dreapta sa

treaca prin punctul dat impune lui α si β legatura $6\alpha - 12\beta = 0$. De aici, pentru $\alpha = 2$ obtinem $\beta = 1$. Cu acestea, ecuatia dreptei din enunt este

$$2(2x + 3y - 5) + 5x - 4y - 5 = 0 \Leftrightarrow 9x + 2y - 15 = 0.$$

10. Sa se scrie ecuatiile suporturilor laturilor triunghiului ABC , daca $A(-1, 4)$ si $y-1 = 0$, $x - y + 1 = 0$ sunt ecuatiile suporturilor a doua bisectoare ale triunghiului.

Solutie

Observam ca virful A nu apartine uneia din bisectoarele date. Dreapta BC este simetrica dreptei AC fata de bisectoarea CC_1 si simetrica dreptei BA fata de bisectoarea BB_1 . Aceasta observatie ne conduce la urmatoarea rezolvare. Aflam simetricile A_1 si A_2 ale punctului A fata de bisectoarele BB_1 si CC_1 , respectiv. Scriem ecuatia A_1A_2 care coincide cu dreapta BC . Aflam coordonatele punctelor B si C rezolvind sistemele respective de ecuatii, apoi scriem ecuatiile dreptelor AB si AC .

Gasim $A_1(-1, -2)$, $A_2(3, 0)$ vezi **problema 5**.

De aici, ecuatia dreptei BC :

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y+2}{2} \Leftrightarrow x - 2y - 3 = 0.$$

Rezolvam sistemul

$$\begin{cases} y=1 \\ x - 2y - 3=0 \end{cases}$$

si obtinem $B(5, 1)$.

Analog

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x - 2y = 3 \end{cases} \Rightarrow C(-5, -4).$$

In final scriem ecuatiile dreptelor AB si AC .

$$AB: x + 2y - 7 = 0.$$

$$AC: 2x - y + 6 = 0.$$

Probleme propuse

1. Fiind data dreapta $2x + 3y - 6 = 0$ sa se gaseasca:

- punctele M si N ale dreptei cu abscisele, respectiv, 6 si -12 ;
- punctele P si Q ale dreptei cu ordonatele, respectiv, $\frac{2}{3}$ si -6 ;
- punctele in care dreapta intersecteaza axele sistemului de coordonate.

2. Sa se scrie ecuatiile dreptelor care trec prin cite doua din punctele $A(3, 4)$, $B(-2, 1)$, $C(1, -5)$, $D(-6, -3)$.

3. Sa se scrie ecuatia dreptei paralele cu O_y care se afla la distanta 2 de ea.

4. Sa se scrie ecuatia dreptei paralele cu O_x care se afla la distanta 5 de ea.
5. Sa se afle punctul de intersectie a dreptelor $3x - 4y - 29 = 0$, $2x + 5y + 19 = 0$.
6. Sa se scrie ecuatiile dreptelor care trec prin punctul $A(3, 5)$ si au panta $k = 2$; $k = -4$; $k = -1$.
7. Sa se scrie ecuatiile dreptelor care trec prin punctul $A(3, -1)$ si formeaza cu axa O_x unghiurile $\alpha = 45^\circ$; $\alpha = 210^\circ$; $\alpha = 300^\circ$.
8. Sa se verifice coliniaritatea punctelor $A(1, 2)$, $B\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, $C(3, -3)$.
9. Sa se determine $\lambda \in \mathbb{R}$ astfel incit punctele $A(\lambda, 2)$, $B(2\lambda + 1, -1)$, $C(3\lambda + 2, 3)$ sa fie coliniare.
10. Sa se scrie ecuatiile diagonalelor paralelogramului ale carui laturi au ecuatiile $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$, $2x - y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.
11. Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctul $A(3, -5)$ si are vectorul director $\vec{a} = \{4, 5\}$.
12. Sa se determine cite un vector director al dreptelor $2x + 5y - 3 = 0$, $y = -4x$.
13. Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctul $A(1, -3)$ si este paralela cu dreapta $3x - 4y - 5 = 0$.
14. Se cunosc virfurile $A(-1, -1)$, $B(3, -2)$, $C(1, 5)$ ale triunghiului ABC . Sa se scrie:
 - a) ecuatiile laturilor triunghiului;
 - b) ecuatia medianei duse din A ;
 - c) ecuatia inaltimii duse din A ;
 - d) ecuatia mediatoarei laturii BC ;
 - e) ecuatia bisectoarei triunghiului construite din A .
15. Sa se determine coordonatele proiectiilor punctului $A(2, 3)$ pe dreptele $3x + 2y - 1 = 0$, $2x - y + 2 = 0$.
16. Sa se determine coordonatele simetricului punctului $A(3, 4)$ in raport cu dreapta $2x - 3y + 1 = 0$.
17. Sa se scrie ecuatia simetricei dreptei $3x + 2y - 1 = 0$ in raport cu dreapta $4x - y + 5 = 0$.
18. Sa se scrie ecuatia dreptei care trece prin punctul $(3, 1)$ si este egal departata de punctele $(-7, 2)$ si $(-9, -6)$.
19. Sa se calculeze distanta dintre dreptele paralele $3x + 4y - 5 = 0$ si $3x + 4y + 20 = 0$.
20. Sa se deduca formula de calcul a distantei dintre dreptele paralele $ax + by + c_1 = 0$ si

$$ax + by + c_2 = 0.$$

21. Sa se gaseasca pe axa absciselor un punct P astfel incit suma distantelor lui pina la punctele $M(1,2)$ si $N(3,4)$ sa fie minimala.

22. Sa se gaseasca pe axa ordonatelor un punct P astfel incit modulul diferentei distantelor lui pina la punctele $M(-3,2)$ si $N(2,5)$ sa fie maximal.

23. Sa se scrie ecuatiile dreptei care trece prin punctul $(2,1)$ si prin punctul de intersectie a dreptelor $x - 2y - 3 = 0$ si $3x + y + 1 = 0$.

24. Sa se determine valorile parametrului real p pentru care dreptele $(p + 1)x - 3y + 2p + 1 = 0$ si $(p - 1)x + 5y - 3p + 2 = 0$ sunt: a) paralele; b) perpendiculare.

25. Se cunosc ecuatiile $2x - y + 12 = 0$ si $3x + 2y - 18 = 0$ ale doua laturi ale unui triunghi si punctul $H(4,5)$ de intersectie a inaltimilor triunghiului. Sa se scrie ecuatiile laturii a treia.

26. Sa se scrie ecuatiile laturilor triunghiului ABC , daca $A(3,1)$ si $2x - y - 1 = 0$, $x - 1 = 0$ sunt ecuatiile a doua mediane ale triunghiului.

27. Sa se scrie ecuatiile laturilor triunghiului ABC , daca $A(6,2)$ si $7x - y - 15 = 0$, $x + 7y + 5 = 0$ sunt ecuatiile inaltimii si, respectiv, bisectoarei ce trec prin acelasi virf.

28. Sa se scrie ecuatiile laturilor triunghiului ABC , daca $A(-7,2)$ si $x + 3y + 11 = 0$, $2x + y + 7 = 0$ sunt ecuatiile inaltimii si, respectiv, medianei ce trec prin virfuri diferite.